

ESTIMASI GERAK PROYEKTIL DENGAN METODE EXTENDED KALMAN FILTER (EKF) PADA INISIAL KONDISI PESAWAT UDARA BERGERAK

Riska Aprilia¹, Erna Apriliani¹, dan Hendro Nurhadi²

¹Departemen Matematika, Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

²Mechatronics and Industrial Automation Research Center, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
e-mail: april@matematika.its.ac.id

Abstrak — Salah satu usaha untuk mempertahankan negara adalah pengembangan dalam bidang kedirgantaraan. Contohnya pada jalur udara dengan pesawat yang dilengkapi dengan teknologi senjata api. Pada bidang kemiliteran, proyektil senjata api yang digunakan adalah proyektil kaliber 12.7×99 mm karena memiliki kecepatan yang sangat tinggi. Oleh karena itu diperlukan sebuah estimator untuk memprediksi lintasan proyektil yang ditembak dari pesawat udara. Salah satu estimator yang dapat digunakan adalah Extended Kalman Filter. Metode ini merupakan pengembangan dari metode Kalman Filter. Pada penelitian ini Extended Kalman Filter dibandingkan dengan Kalman Filter untuk mengetahui hasil estimasi yang optimal dengan data pengukuran diasumsikan linier. Hasil estimasi menunjukkan bahwa Extended Kalman Filter memiliki hasil yang optimal untuk memprediksi lintasan proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak. Hal ini ditunjukkan dengan tingkat keakuratan sebesar 97.81% pada posisi x , 64.34% pada posisi y , dan 98.13% pada posisi z .

Kata Kunci : Extended Kalman Filter, Kalman Filter, Gerak Proyektil

PENDAHULUAN

Pertahanan Negara adalah usaha mempertahankan kedaulatan, keutuhan, keselamatan segenap bangsa dari ancaman baik dari dalam maupun luar. Usaha untuk mendukung pertahanan negara adalah dengan pengembangan dalam bidang kedirgantaraan. Sistem pertahanan negara pada jalur udara dapat menggunakan pesawat yang dilengkapi dengan teknologi persenjataan berupa senjata api atau senapan angin yang juga dilengkapi dengan proyektil. Terdapat beberapa macam proyektil yang digunakan pada dunia kemiliteran. Salah satunya adalah proyektil kaliber 12.7×99 mm karena dapat merusak target dengan kecepatan yang tinggi. Karena kecepatan proyektil yang sangat tinggi, maka sangat penting untuk memprediksi gerak proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak. Sehingga untuk memprediksi gerak proyektil tersebut maka diperlukan adanya estimator. Pada penelitian terdahulu telah banyak dikembangkan tentang masalah gerak proyektil. Salah satunya adalah memprediksi gerak proyektil yang ditembak dari pesawat subsonic dengan mempertimbangkan gaya dan momen yang bekerja pada proyektil (Gkritzapis, D.N., dkk. 2010). Dan memprediksi lintasan proyektil yang dipengaruhi oleh fenomena gerak *pitching* dan *yawing* (Gkritzapis, Dimitrios N dan Panagiotopoulos, Elias E. 2011).

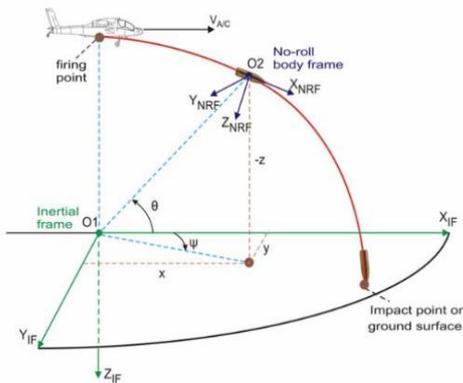
Salah satu metode estimasi yang sering digunakan adalah Kalman Filter. Kalman Filter merupakan estimator untuk sistem dinamik stokastik yang linier (Apriliani, E., Arif, D.K, dan Sanjoyo, B.A. 2010). Kalman filter adalah estimator optimal linier dengan adanya noise sistem dan noise pengukuran (Pieniezny, S.K. 2007). Disisi lain, banyak modifikasi dari metode Kalman Filter. Modifikasi dilakukan untuk menghindari konvergensi algoritma, untuk mengurangi waktu komputasi, untuk mengurangi kesalahan estimasi, dan sebagainya (Apriliani, E., Arif, B. (2011). Salah satu modifikasi dari Kalman Filter adalah metode Extended Kalman Filter. Extended Kalman Filter merupakan metode estimasi yang digunakan untuk sistem dinamik stokastik yang tak linier. Model gerak proyektil yang digunakan pada penelitian ini adalah model gerak proyektil dengan enam derajat kebebasan, berbentuk tak linier dengan target diam. Sehingga Model yang berupa system matematika tak linier tersebut diestimasi dengan menggunakan metode Extended Kalman Filter dan dengan mengasumsikan data pengukurannya linier. Pada penelitian ini juga menggabungkan metode Kalman Filter sebagai pembanding untuk metode Extended Kalman Filter. Dikarenakan model gerak proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak memiliki sistem yang non linier, sehingga sebelum di aplikasikan ke dalam metode Kalman

Filter model yang tak linier perlu dilinierisasi dengan mendefinisikan matrik Jacobi (Pieniezny,S.K. (2007). Berdasarkan pemaparan diatas, penulis mengangkat sebuah permasalahan dengan judul “*Estimasi Gerak Proyektil kaliber 12,7 × 99 mm Menggunakan Metode Extended Kalman Filter (EKF) Pada Inisial Kondisi Pesawat Udara Bergerak*”.

MODEL MATEMATIKA

A. Model Gerak Proyektil

Model gerak proyektil yang ditembak dari pesawat yang bergerak dapat dimodelkan dengan enam derajat kebebasan (6-DOF) (Gkritzapis,Dimitrios N dan Panagiotopoulos, Elias E. 2011). Enam derajat kebebasan terdiri dari tiga komponen translasi yang menggambarkan posisi pusat massa proyektil, dan tiga sudut Euler. Gaya yang bekerja pada proyektil terdiri dari berat, gaya aerodinamik, dan gaya magnus. Di sisi lain momen yang bekerja pada proyektil terdiri dari momen, karena gaya aerodinamika standar, momen aerodinamis Magnus dan momen aerodinamis yang tidak stabil. Model gerak proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak diilustrasikan pada gambar 1.



Gambar 1. Lintasan penerbangan atmosfer dari proyektil penembakan datar dari pesawat terbang.

Pada model gerak peluru terdapat dua belas variable state yaitu : $x, y, z, \theta, \psi, \varphi, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$ yang dibutuhkan untuk deskripsi posisi, arah penerbangan, kecepatan pada tiap titik lintasan peluru. Komponen-komponen gaya dan momen yang bekerja dinyatakan dalam bingkai no-roll ($\hat{*}$) dengan dimensi panjang yang diskripsikan sebagai lintasan peluru terhadap kaliber, sebagai independen variable (Gkritzapis,Dimitrios N dan

Panagiotopoulos, Elias E. 2011), yang ditulis sebagai berikut :

$$l = \frac{1}{D} s = \frac{1}{D} \int_0^t V dt \quad (1)$$

Persamaan gerak peluru di definisikan sebagai berikut (Pieniezny,S.K. 2007).:

$$\frac{dx}{dl} = \frac{D}{V} (\cos \theta \hat{u} - \psi \hat{v} + \sin \theta \hat{w}) \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dl} = \frac{D}{V} (\psi \cos \theta \hat{u} + \hat{v} + \psi \sin \theta \hat{w}) \quad (3)$$

$$\frac{dz}{dl} = \frac{D}{V} (-\sin \theta \hat{u} + \cos \theta \hat{w}) \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{D}{V} (\hat{p} + \tan \theta \hat{r}) \quad (5)$$

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{D}{V} \hat{q} \quad (6)$$

$$\frac{d\psi}{dl} = \frac{D}{V \cos \theta} \hat{r} \quad (7)$$

$$\frac{d\hat{u}}{dl} = -\frac{D}{V} g \sin \theta - \frac{\rho S_{ref} D}{2m} C_D V \quad (8)$$

$$\frac{d\hat{v}}{dl} = -\frac{\rho S_{ref} D}{2m} (C_{LA} + C_D)(\hat{v} - \hat{v}_w) - D \hat{r} \quad (9)$$

$$\frac{d\hat{w}}{dl} = -\frac{\rho S_{ref} D}{2m} (C_{LA} + C_D)(\hat{w} - \hat{w}_w) + D \hat{q} + \frac{D}{V} g \cos \theta \quad (10)$$

$$\frac{d\hat{p}}{dl} = \frac{\pi \rho D^5}{16 I_{YY}} C_{RD} \hat{p} \quad (11)$$

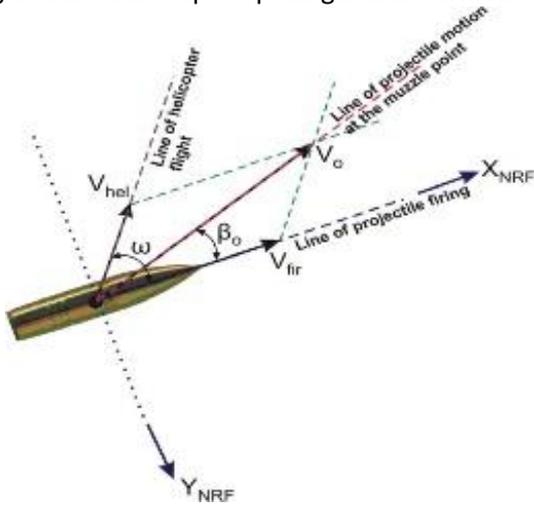
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}}{dl} = & \frac{\pi \rho D^5}{16 I_{YY} V} L_{CGCM} C_{MaM} \hat{p} (\hat{v} - \hat{v}_w) \\ & + \frac{\pi \rho D^3}{8 I_{YY}} L_{CGCP} (C_{LA} \\ & + C_D)(\hat{w} - \hat{w}_w) \\ & + \frac{\pi \rho D^5}{16 I_{YY}} C_{PD} \hat{q} \\ & + \frac{\pi \rho D^4}{8 I_{YY}} C_{OM} - \frac{I_{XX} D}{I_{YY} V} \hat{p} \hat{r} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dl} = & \frac{\pi \rho D^4}{16 I_{YY} V} L_{CGCM} C_{MaM} \hat{p} (\hat{w} - \hat{w}_w) \\ & - \frac{\pi \rho D^3}{8 I_{YY}} L_{CGCP} (C_{LA} \\ & + C_D)(\hat{v} - \hat{v}_w) \\ & + \frac{\pi \rho D^5}{16 I_{YY}} C_{PD} \hat{r} \\ & - \frac{\pi \rho D^4}{8 I_{YY}} C_{OM} - \frac{I_{XX} D}{I_{YY} V} \hat{p} \hat{q} \end{aligned} \quad (13)$$

Model gerak proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak yaitu pada persamaan (2) sampai (13) yang digunakan untuk estimasi yaitu berbentuk turunan terhadap waktu yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{dl} \frac{dl}{dt} \quad (14)$$

Dengan X merupakan kumpulan state pada model gerak proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak. Pada model gerak proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak juga memiliki sedikit perbedaan dengan model gerak proyektil yang ditembakkan dari senjata yang diam yaitu pada inialisasi kecepatan total dari proyektil yang diasumsikan seperti pada gambar berikut:



Gambar 2. Gambaran tentang kecepatan peluru pada titik tembak senjata api pada penerbangan sebuah pesawat

Sesuai pada gambar berikut inisial total kecepatan moncong senjata api V_0 pada proyektil yang ditembakkan ke arah kanan V_{fir} dengan sudut ω yang relative pada gerak penerbangan pesawat $V_{A/C}$ yang di definisikan sebagai berikut (Pieniezny,S.K. 2007). :

$$V_0 = \sqrt{V_{fir}^2 + V_{A/C}^2 + 2 V_{fir} V_{A/C} \cos \omega} \quad (15)$$

Pada model gerak proyektil yang ditembakkan dari pesawat udara bergerak juga diasumsikan bahwa kecepatan pada komponen \hat{u} diganti dengan V karena diasumsikan bahwa pengaruh kecepatan angin sangat kecil sehingga mempengaruhi komponen kecepatan \hat{v} dan \hat{w} yang diasumsikan sangat kecil sehingga dapat didefinisikan sebagai berikut (Pieniezny,S.K. 2007). :

$$V = \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2} \approx \hat{u} \quad (16)$$

Sesuai persamaan (16) maka persamaan (2)-(13) disubstitusi menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dl} &= \frac{D}{V} (V \cos \theta - \psi \hat{v} + \sin \theta \hat{w}) \\ \frac{dy}{dl} &= \frac{D}{V} (\psi V \cos \theta + \hat{v} + \psi \sin \theta \hat{w}) \\ \frac{dz}{dl} &= \frac{D}{V} (-V \sin \theta + \cos \theta \hat{w}) \\ \frac{d\varphi}{dl} &= \frac{D}{V} (\hat{p} + \tan \theta \hat{r}) \\ \frac{d\theta}{dl} &= \frac{D}{V} \hat{q} \\ \frac{d\psi}{dl} &= \frac{D}{V \cos \theta} \hat{r} \\ \frac{dV}{dl} &= -\frac{D}{V} g \sin \theta - \frac{\rho S_{ref} D}{2m} C_D V \\ \frac{d\hat{v}}{dl} &= -\frac{\rho S_{ref} D}{2m} (C_{LA} + C_D) (\hat{v} - \hat{v}_w) - D \hat{r} \\ \frac{d\hat{w}}{dl} &= -\frac{\rho S_{ref} D}{2m} (C_{LA} + C_D) (\hat{w} - \hat{w}_w) + D \hat{q} \\ &\quad + \frac{D}{V} g \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}}{dl} &= \frac{\pi \rho D^5}{16 I_{YY}} C_{RD} \hat{p} \\ \frac{d\hat{q}}{dl} &= \frac{\pi \rho D^4}{16 I_{YY} V} L_{CGCM} C_{MaM} \hat{p} (\hat{v} - \hat{v}_w) \\ &\quad + \frac{\pi \rho D^3}{8 I_{YY}} L_{CGCP} (C_{LA} + C_D) (\hat{w} \\ &\quad - \hat{w}_w) + \frac{\pi \rho D^5}{16 I_{YY}} C_{PD} \hat{q} \\ &\quad + \frac{\pi \rho D^4}{8 I_{YY}} C_{OM} - \frac{I_{XX} D}{I_{YY} V} \hat{p} \hat{r} \\ \frac{d\hat{r}}{dl} &= \frac{\pi \rho D^4}{16 I_{YY} V} L_{CGCM} C_{MaM} \hat{p} (\hat{w} - \hat{w}_w) \\ &\quad - \frac{\pi \rho D^3}{8 I_{YY}} L_{CGCP} (C_{LA} + C_D) (\hat{v} - \hat{v}_w) \\ &\quad + \frac{\pi \rho D^5}{16 I_{YY}} C_{PD} \hat{r} - \frac{\pi \rho D^4}{8 I_{YY}} C_{OM} \\ &\quad - \frac{I_{XX} D}{I_{YY} V} \hat{p} \hat{q} \end{aligned} \quad (17)$$

Persamaan (17) adalah persamaan diferensial terhadap panjang proyektil yang akan diubah kedalam bentuk persamaan dinamis terhadap waktu sesuai yang telah didefinisikan pada persamaan (14) sehingga persamaan (17) menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \theta - \psi \hat{v} + \sin \theta \hat{w} \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi V \cos \theta + \hat{v} + \psi \sin \theta \hat{w} \quad (19)$$

$$\frac{dz}{dt} = -V \sin \theta + \cos \theta \hat{w} \quad (20)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \hat{p} + \tan \theta \hat{r} \quad (21)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \hat{q} \quad (22)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\hat{r}}{\cos \theta} \quad (23)$$

$$\frac{dV}{dt} = -g \sin \theta - \frac{\rho S_{ref}}{2m} C_D V^2 \quad (24)$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = -\frac{\rho S_{ref} V}{2m} (C_{LA} + C_D)(\hat{v} - \hat{v}_w) - V \hat{r} \quad (25)$$

$$\frac{d\hat{w}}{dt} = -\frac{\rho S_{ref} V}{2m} (C_{LA} + C_D)(\hat{w} - \hat{w}_w) + V \hat{q} + g \cos \theta \quad (26)$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{\pi \rho D^4}{16 I_{YY}} V C_{RD} \hat{p} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}}{dt} = & \frac{\pi \rho D^3}{16 I_{YY}} L_{CGCM} C_{MaM} \hat{p} (\hat{v} - \hat{v}_w) \\ & + \frac{\pi \rho D^2 V}{8 I_{YY}} L_{CGCP} (C_{LA} \\ & + C_D)(\hat{w} - \hat{w}_w) \\ & + \frac{\pi \rho D^4 V}{16 I_{YY}} C_{PD} \hat{q} \\ & + \frac{\pi \rho D^3 V}{8 I_{YY}} C_{OM} - \frac{I_{XX}}{I_{YY}} \hat{p} \hat{r} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} = & \frac{\pi \rho D^3}{16 I_{YY}} L_{CGCM} C_{MaM} \hat{p} (\hat{w} - \hat{w}_w) \\ & - \frac{\pi \rho D^2 V}{8 I_{YY}} L_{CGCP} (C_{LA} + C_D)(\hat{v} \\ & - \hat{v}_w) + \frac{\pi \rho D^4 V}{16 I_{YY}} C_{PD} \hat{r} \\ & - \frac{\pi \rho D^3 V}{8 I_{YY}} C_{OM} - \frac{I_{XX}}{I_{YY}} \hat{p} \hat{q} \end{aligned} \quad (29)$$

Persamaan (18)-(29) merupakan persamaan kontinu yang akan di estimasi dengan menggunakan KF dan juga EKF sehingga diubah dalam bentuk diskrit stokastik dengan menggunakan metode Beda Hingga Maju, dengan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$x_{k+1} = \Delta t (\cos \theta_k V_k - \psi_k \hat{v}_k + \sin \theta_k \hat{w}_k) + x_k + w_{1k} \quad (30)$$

$$y_{k+1} = \Delta t (\psi_k V_k \cos \theta_k + \hat{v}_k + \psi_k \sin \theta_k \hat{w}_k) + y_k + w_{2k} \quad (31)$$

$$z_{k+1} = \Delta t (-V_k \sin \theta_k + \cos \theta_k \hat{w}_k) + z_k + w_{3k} \quad (32)$$

$$\varphi_{k+1} = \Delta t (\hat{p}_k + \hat{r}_k \tan \theta_k) + \varphi_k + w_{4k} \quad (33)$$

$$\theta_{k+1} = \hat{q}_k \Delta t + \theta_k + w_{5k} \quad (34)$$

$$\psi_{k+1} = \Delta t \left(\frac{\hat{r}_k}{\cos \theta_k} \right) + \psi_k + w_{6k} \quad (35)$$

$$V_{k+1} = \Delta t \left(-g \sin \theta_k - \frac{\rho S_{ref}}{2m} C_D V_k^2 \right) + V_k + w_{7k} \quad (36)$$

$$\hat{v}_{k+1} = \Delta t \left(-\frac{\rho S_{ref} V_k}{2m} (C_{LA} + C_D)(\hat{v}_k - \hat{v}_w) - V_k \hat{r}_k \right) + \hat{v}_k + w_{8k} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \hat{w}_{k+1} = & \Delta t \left(-\frac{\rho S_{ref} V_k}{2m} (C_{LA} + C_D)(\hat{w}_k - \hat{w}_w) \right. \\ & \left. + V_k \hat{q}_k + g \cos \theta_k \right) + \hat{w}_k \\ & + w_{9k} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\hat{p}_{k+1} = \Delta t \left(\frac{\pi \rho D^4}{16 I_{YY}} V_k C_{RD} \hat{p}_k \right) + \hat{p}_k + w_{10k} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{k+1} = & \Delta t \left(\frac{\pi \rho D^3}{16 I_{YY}} L_{CGCM} C_{MaM} \hat{p}_k (\hat{v}_k - \hat{v}_w) \right. \\ & + \frac{\pi \rho D^2 V_k}{8 I_{YY}} L_{CGCP} (C_{LA} \\ & + C_D)(\hat{w}_k - \hat{w}_w) \\ & + \frac{\pi \rho D^4 V_k}{16 I_{YY}} C_{PD} \hat{q}_k \\ & + \frac{\pi \rho D^3 V_k}{8 I_{YY}} C_{OM} \\ & \left. - \frac{I_{XX}}{I_{YY}} \hat{p}_k \hat{r}_k \right) + \hat{q}_k + w_{11k} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \hat{r}_{k+1} = & \Delta t \left(\frac{\pi \rho D^3}{16 I_{YY}} L_{CGCM} C_{MaM} \hat{p}_k (\hat{w}_k - \hat{w}_w) \right. \\ & - \frac{\pi \rho D^2 V_k}{8 I_{YY}} L_{CGCP} (C_{LA} \\ & + C_D)(\hat{v}_k - \hat{v}_w) \\ & + \frac{\pi \rho D^4 V_k}{16 I_{YY}} C_{PD} \hat{r}_k \\ & - \frac{\pi \rho D^3 V_k}{8 I_{YY}} C_{OM} \\ & \left. - \frac{I_{XX}}{I_{YY}} \hat{p}_k \hat{q}_k \right) + \hat{r}_k + w_{12k} \end{aligned} \quad (41)$$

Dan dengan data pengukuran yang dimiliki adalah untuk posisi x, y , dan z dengan data pengukuran diasumsikan linier atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan (30) – (41) yang akan digunakan untuk Nilai Real, sedangkan model sistem yang akan digunakan untuk estimasi dengan metode Kalman Filter menggunakan matriksi A yang sudah dilinierkan dengan metode Jacobi

B. Implementasi Metode Kalman Filter

Metode Kalman Filter diperkenalkan pertama kali oleh R.E. Kalman pada tahun 1960 (Kleeman, Lindsay.2007). Kalman Filter merupakan suatu estimator sistem dinamik linear. Terdapat dua tahapan pada Kalman Filter. Tahap prediksi (*time update*) merupakan tahap estimasi dari sistem model dinamik, sedangkan tahap koreksi (*measurement update*) merupakan tahap estimasi

dari model pengukuran (Lewis, F.L.(1998). Algoritma Kalman Filter waktu diskrit ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Model sistem} &: x_{k+1} \\ &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k \\ &+ \mathbf{G}w_k \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \text{Model} &: z_k = \mathbf{H}x_k + v_k \\ \text{Pengukuran} & \end{aligned} \quad (43)$$

Pada tahap koreksi, hasil estimasi variabel keadaan dikoreksi menggunakan model pengukuran. Salah satu bagian dari tahap ini yaitu menentukan matriks Kalman Gain yang digunakan untuk meminimumkan kovariansi error (Ermayanti,Z, dkk. 2015). Tahap prediksi dan tahap koreksi akan diulang terus menerus sampai waktu k yang ditentukan. Algoritma Kalman Filter diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Algoritma Kalman Filter

Model Sistem	$x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{G}w_k$
Model Pengukuran	$z_k = \mathbf{H}x_k + v_k$
Asumsi	$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}), w_k \sim N(0, Q_k)$ $, v_k \sim N(0, R_k)$
Inisialisasi	$\hat{X}_0 = \bar{X}_0$ $P_0 = P_{x_0}$
Tahap Prediksi	Estimasi : $\hat{X}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \hat{x}_k + \mathbf{B}u_k$ Kovarian Error : $P_{k+1}^- = \mathbf{A}_k P_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{G}_k Q_k \mathbf{G}_k^T$
Tahap Koreksi	Kalman Gain : $K_{k+1} = P_{k+1}^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} P_{k+1}^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$ Estimasi : $\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1}^- + K_{k+1} (z_{k+1} - \mathbf{H} \hat{X}_{k+1}^-)$ Kovarian Error : $P_{k+1} = [\mathbf{I} - K_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] P_{k+1}^-$ $[\mathbf{I} - K_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}]^T$ $+ K_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} K_{k+1}^T$

C. Metode Extended Kalman Filter

Dalam Kalman Filter model yang digunakan adalah linier, tetapi pada kenyataannya banyak model tak linier. Oleh sebab itu, dikembangkan metode Extended Kalman Filter yang digunakan untuk menyelesaikan model tak linier. Misalkan diberikan model stokastik tak linier :

$$X_{k+1} = f(X_k, u_k) + w_k \quad (44)$$

Dengan model pengukuran tak linier $Z_k \in R^n$ yang memenuhi

$$Z_k = h_k(X_k) + v_k \quad (45)$$

Tabel 2. Algoritma Extended Kalman Filter

Model Sistem	$X_{k+1} = f(X_k, u_k) + w_k$
Model Pengukuran	$Z_{k+1} = h(X_{k+1}) + v_k$
Asumsi	$x_0 \sim N(\bar{X}_0, P_{x_0}), w_k \sim N(0, Q_k)$ $, v_k \sim N(0, R_k)$
Inisialisasi	$\hat{X}_0 = \bar{X}_0$ $P_0 = P_{x_0}$
Tahap Prediksi	$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial X_j} (\hat{X}_k, u_k) \right]$ Estimasi : $\hat{x}_{k+1}^- = f(X_k, u_k)$ Kovarian Error : $P_{k+1}^- = \mathbf{A} P_k + \mathbf{P} \mathbf{A}^T + \mathbf{G}_k Q_k \mathbf{G}_k^T$
Tahap Koreksi	Kalman Gain : $K_{k+1} = P_{k+1}^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} P_{k+1}^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1}$ Estimasi : $\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1}^- + K_{k+1} (Z_{k+1} - h(\hat{X}_{k+1}^-))$ Kovarian Error : $P_{k+1} = [\mathbf{I} - K_{k+1} \mathbf{H}] P_{k+1}^-$

ANALISIS HASIL DAN PEMBAHASAN

Simulasi yang dilakukan dengan diberikan kondisi awal sebagai berikut:

Tabel 3. Kondisi Awal masing-masing Variabel

$t = 0$	Nilai Awal	$t = 0$	Nilai Awal
x	0	V	1105,85 m/s
y	0	\hat{v}	230 m/s
z	500 m	\hat{w}	0
φ	0	\hat{p}	0
θ	0.262 rad	\hat{q}	0
ψ	0	\hat{r}	0

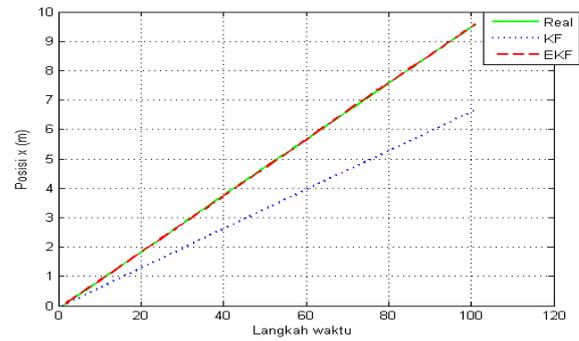
Tabel 4. Parameter Proyektil Kaliber 12.7 x 99 mm

Keterangan	Simbol	Parameter
Massa Proyektil	m	0.0452 kg
Diameter	D	0.0127 m

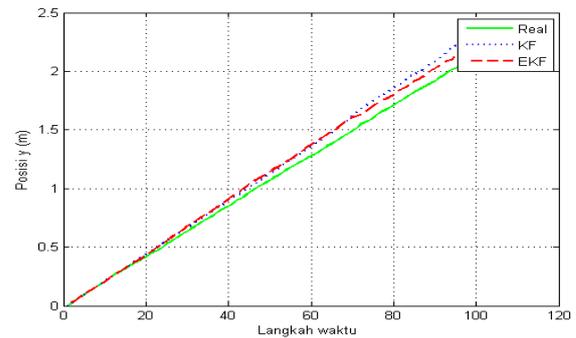
Massa jenis udara	ρ	1 kg/m^3
Luas Permukaan proyektil	S_{ref}	0.000127 m^2
Koefisien roll damping	C_{rd}	-0.009
Koefisien gaya tarik	C_d	0.63
Koefisien gaya angkat	C_{la}	3.52
Momen magnus	C_{MaM}	0.27
Koefisien overtuning magnus	C_{OM}	2.6
Momen axial Inersia	I_{xx}	0.7843×10^{-6}
Momen Tranverse Inersia	I_{yy}	0.7389×10^{-6}
Gaya gravitasi bumi	g	9.8065
Jarak antara pusat gravitasi dengan pusat magnus	L_{CGCM}	0.01956
Jarak antara pusat gravitasi dengan pusat tekanan	L_{CGCP}	0.02318

A. Simulasi I

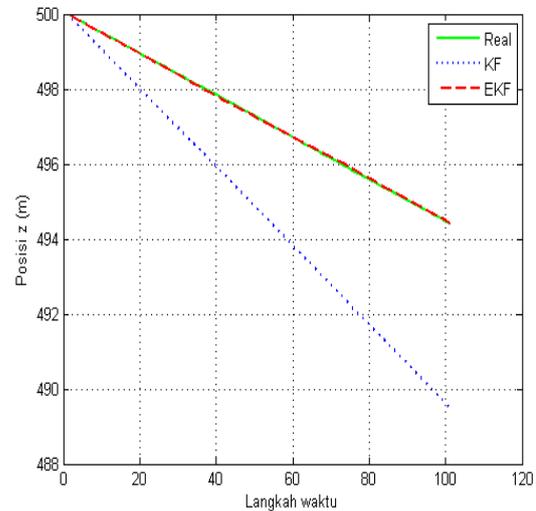
Simulasi pada percobaan pertama dengan diberikan kondisi awal dan parameter seperti pada Tabel 3 dan Tabel 4 dan data pengukuran x , y dan z . estimasi EKF. Gambar 3 merupakan grafik perbandingan nilai real dengan hasil estimasi pada variable x . Hasil yang diperoleh menunjukkan selisih antara nilai real dengan nilai hasil estimasi KF sebesar 0.2880 dan selisih antara nilai real dengan hasil estimasi EKF sebesar 0.0017. Gambar 4 merupakan gambar grafik perbandingan antara nilai real dan hasil estimasi pada variable y . Hasil yang diperoleh menunjukkan selisih antara nilai real dengan nilai hasil estimasi KF sebesar 0.0064 dan selisih antara nilai real dengan hasil estimasi EKF sebesar 0.0024. Gambar 5 merupakan gambar grafik perbandingan antara nilai real dengan hasil estimasi variable z . Hasil simulasi menunjukkan bahwa selisih nilai real dengan hasil estimasi KF sebesar 0.4950 dan selisih antara nilai real dengan hasil estimasi EKF sebesar 0.0083. Berikut grafik hasil simulasi:



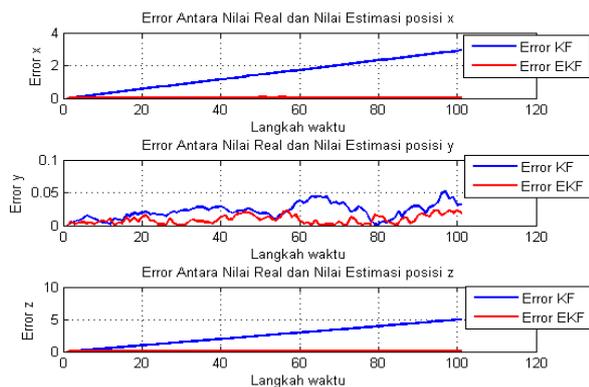
Gambar 3. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel x



Gambar 4. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel y



Gambar 5. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Variabel z



Gambar 6. Perbandingan Error antara Nilai Real dan Estimasi

Pada gambar 6. menunjukkan nilai error antara nilai real dan nilai estimasi dari ketiga variable yang diukur. Dapat dilihat dari grafik bahwa nilai error yang paling kecil adalah error antara nilai real dengan simulasi menggunakan metode Extended Kalman Filter daripada error antara nilai real dengan hasil simulasi Kalman Filter. Hal ini ditunjukkan dari nilai RMSE dari masing-masing variable yang terukur.

Tabel 5. Nilai rata-rata RMSE dari Metode KF dan EKF

Langkah	Posisi x	
	RMSE KF (m)	RMSE EKF (m)
100	0.29193	0.006379
	Posisi y	
	RMSE KF (m)	RMSE EKF (m)
	0.009119	0.005324
	Posisi z	
	RMSE KF (m)	RMSE EKF (m)
0.485748	0.009029	

Pada table 5. terlihat bahwa nilai RMSE yang dihasilkan oleh metode EKF relative lebih kecil yaitu antara interval $0,005324 \leq rmse \leq 0,009029$ sedangkan RMSE yang dihasilkan oleh metode KF yaitu pada interval $0.009119 \leq rmse \leq 0.48748$. Hal ini dapat dikatakan bahwa estimasi gerak proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak lebih akurat menggunakan metode Extended Kalman Filter dengan error estimasi

97.81% lebih kecil pada variable x, 64.34% lebih kecil pada variable y dan 98.13% lebih kecil pada variable z.

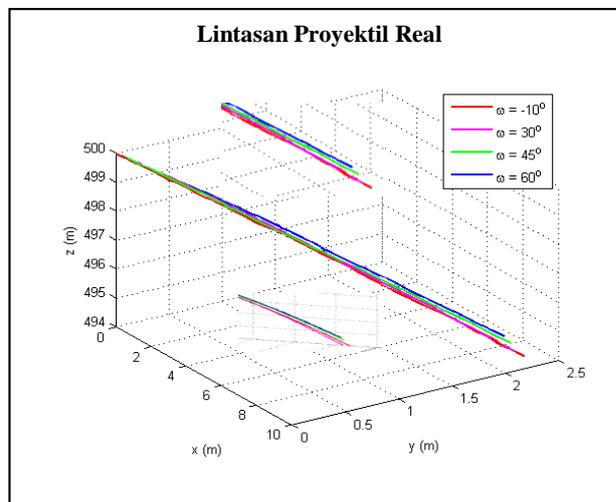
B. Simulasi II

Pada percobaan kali ini dilakukan simulasi yang mengacu pada gambar 1 dengan kondisi awal dan parameter pada tabel 3 dan 4 dan dengan data pengukuran yang dimiliki adalah variable posisi x, y, dan z. Tujuan dari percobaan simulasi ini adalah untuk mengetahui lintasan dari proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak dengan asumsi target diam dan kecepatan dari pesawat konstan yang diberikan selama 100 langkah.

Pada penelitian ini, diambil beberapa sudut tembak yaitu $-10^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ dan 60° untuk inialisasi kecepatan total sesuai pada persamaan (15). Sehingga diperoleh inialisasi kecepatan total proyektil sesuai pada tabel berikut:

Tabel 6. Kecepatan Total Proyektil

Sudut Tembak	-10°	30°	45°	60°
Kecepatan Total (m/s)	1127.212	1105.180	1075.008	1034.359



Gambar 7. Lintasan Proyektil oleh Sistem Real

Pada gambar 7, lintasan yang terbentuk adalah lintasan proyektil oleh sistem real. Pada gambar terlihat bahwa lintasan yang terbentuk berupa garis lurus yang membentuk sebuah gradien. Dengan mengambil sudut tembak yang berbeda mempengaruhi kecepatan total dari proyektil yang berbeda pula. Hal ini juga mempengaruhi posisi terakhir dari proyektil selama 100 langkah. Berikut

adalah table posisi terakhir proyektil oleh lintasan real dengan posisi awal (x, y, z) adalah $(0,0,500)m$

Tabel 7. Posisi Akhir Proyektil oleh Sistem Real

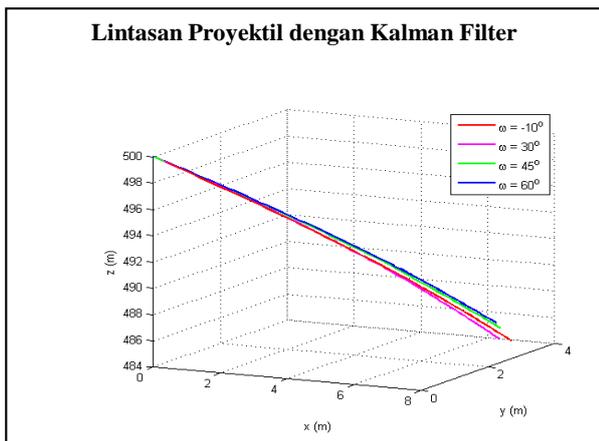
Posisi	Sudut			
	-10°	30°	45°	60°
x	9.7629 m	9.5314 m	9.3126 m	8.8968 m
y	2.1792	2.1731 m	2.1465 m	2.2969 m
z	494.3624 m	494.4049 m	494.6104 m	494.7251 m

Dari hasil tersebut didapatkan panjang lintasan proyektil oleh sistem real pada bidang koordinat x dan y sebagai berikut:

Tabel 8. Panjang Lintasan Proyektil oleh Sistem Real pada Bidang x, y

Sudut	Panjang Lintasan
-10°	10.0036 m
30°	9.7760 m
45°	9.5568 m
60°	9.1881 m

Dari tabel 7 dan 8 semakin besar sudut tembak yang diberikan maka panjang lintasan yang terbentuk pada bidang x, y dan juga ketinggiannya semakin pendek. Hal ini juga dipengaruhi oleh kecepatan total dari proyektil yang semakin kecil



Gambar 8. Lintasan Proyektil dengan Sistem Real

Sedangkan pada gambar 8, merupakan lintasan oleh Kalman Filter. Terlihat pada gambar lintasan yang dibentuk oleh Kalman Filter menyerupai setengah parabola. Berbeda dengan lintasan yang dibentuk oleh sistem real.

Hal ini juga mempengaruhi posisi terakhir dari proyektil selama 100 langkah. Berikut adalah tabel posisi terakhir proyektil oleh lintasan oleh KF dengan posisi awal (x, y, z) adalah $(0,0,500)$.

Tabel 9. Posisi Akhir Proyektil pada Lintasan oleh Kalman Filter

Posisi	Sudut			
	-10°	30°	45°	60°
x	5.2614 m	5.0621 m	4.9991 m	4.7729 m
y	2.9547m	2.9673m	3.0201 m	3.1448 m
z	486.5796 m	486.8620 m	487.4528 m	487.7955 m

Dari hasil tersebut didapatkan panjang lintasan proyektil oleh KF pada bidang koordinat x dan y sebagai berikut:

Tabel 10. Panjang Lintasan Proyektil oleh KF pada Bidang x, y

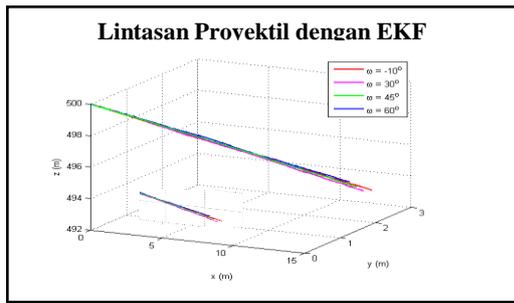
Sudut	Panjang Lintasan
-10°	6.0343 m
30°	5.8677 m
45°	5.8405 m
60°	5.7158 m

Lintasan yang dibentuk oleh Kalman Filter pada bidang x, y memiliki selisih dengan lintasan yang dibentuk oleh sistem asli. Berikut adalah tabel selisih lintasan oleh sistem real dengan KF.

Tabel 11. Error Lintasan Proyektil oleh Real dan KF pada Bidang x, y

Sudut	Error
-10°	3.9693 m
30°	3.9083 m
45°	3.7163 m
60°	3.4723 m

Dari tabel 11 terlihat bahwa selisih atau error lintasan oleh sistem real dengan KF relative besar, yaitu antara interval $3.4723 \leq \text{error} \leq 3.9693$.



Gambar 9. Lintasan Proyektil dengan EKF

Pada gambar 9, merupakan lintasan oleh Extended Kalman Filter. Terlihat pada gambar lintasan yang dibentuk oleh Extended Kalman Filter menyerupai dengan sistem asli yang menyerupai dengan gradien.

Berikut adalah tabel posisi terakhir proyektil oleh lintasan oleh EKF dengan posisi awal (x, y, z) adalah $(0,0,500)$.

Tabel 12. Posisi Akhir Proyektil pada Lintasan oleh EKF

Posisi	Sudut			
	-10°	30°	45°	60°
x	x	9.7814 m	9.6117 m	9.3437 m
y	y	2.6389 m	2.7967 m	2.8948 m
z	z	494.2973 m	494.4459 m	494.5889 m

Dari hasil tersebut didapatkan panjang lintasan proyektil oleh EKF pada bidang koordinat x dan y sebagai berikut:

Tabel 13. Panjang Lintasan Proyektil oleh EKF pada Bidang x, y

Sudut	Panjang Lintasan
-10°	10.1311 m
30°	10.0103 m
45°	9.7819 m
60°	9.4389 m

Lintasan yang dibentuk oleh Extended Kalman Filter pada bidang x, y memiliki selisih dengan lintasan yang dibentuk oleh sistem asli. Berikut adalah tabel selisih lintasan oleh sistem real dengan EKF.

Dari tabel 14. terlihat bahwa selisih atau error lintasan oleh sistem real dengan EKF relative kecil dibanding dengan selisih antara lintasan oleh real

dengan KF yaitu antara interval $0.1275 \leq error \leq 0.2508$.

Tabel 14. Error Lintasan Proyektil oleh Real dan EKF pada Bidang x, y

Sudut	Error
-10°	0.1275 m
30°	0.2343 m
45°	0.2251 m
60°	0.2508 m

Pada simulasi II menunjukkan bahwa sudut tembak yang diberikan mempengaruhi kecepatan total proyektil. Semakin besar sudut tembak yang diberikan maka semakin kecil kecepatan total proyektil yang menyebabkan jarak yang ditempuh proyektil pada posisi x semakin kecil pula pada langkah ke 100. Pada simulasi II ini juga dapat disimpulkan bahwa lintasan yang dibentuk oleh EKF lebih mendekati dengan lintasan yang dibentuk oleh sistem real dengan ditunjukkan dengan error yang relative kecil. Hal ini membuktikan bahwa EKF lebih bekerja optimal daripada KF untuk mengestimasi gerak proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak. Lintasan Proyektil oleh Kalman Filter

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- Hasil Estimasi menunjukkan bahwa untuk variable posisi x, y , dan z dari gerak proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak oleh metode Extended Kalman Filter (EKF) lebih baik dengan keakurasian sebesar 97.81% pada variable x , 64.34% pada variable y , dan 98.13% pada variable z .
- Metode Extended Kalman Filter lebih akurat dibanding dengan metode Kalman Filter. Estimasi dengan metode Kalman Filter tidak optimal dengan diperolehnya nilai RMSE pada interval $0.009119 \leq rmse \leq 0.48748$ dikarenakan KF dapat mengestimasi secara optimal pada sistem dinamik linier, sedangkan persamaan gerak

proyektil yang ditembak dari pesawat udara bergerak berbentuk nonlinier.

- Waktu komputasi menunjukkan bahwa gabungan metode Kalman Filter dan Extended Kalman Filter memerlukan waktu 0.518067 detik.

DAFTAR PUSTAKA

- Apriliani,E., Arif,D.K, dan Sanjoyo,B.A. (2010). "The Square Root Ensemble Kalman Filter to estimate The Concentration of Air Pollution". IEEE, International Conference on Mathematical Application in Engineering (ICMAE'10). Kuala Lumpur, Malaysia.
- Apriliani,E., Arry,B. (2011). "The Groundwater Pollution Estimation by The Ensemble Kalman Filter". Canadian Journal on Science and Engineering Mathematics, Vol.2.60-63.
- Ermayanti,Z., Apriliani,E., Nurhadi,H., Herlambang,T. (2015). "Estimate and Control Position Autonomous Underwater Vehicle based on Determined Trajectory using Fuzzy Kalman Filter Method". 2015 International Conference on Advance Mechatronics, Intelligent Manufacture, and Industrial Automation (ICAMIMIA).
- Gkritzapis,D.N., Margaris, D.P., Kaimakamis, G., Siassiakos, K. (2010). "A Study of Firing Sidewise from an Airplane". Applied Mathematical Science. Vol. 4 no.1. Page 1-12
- Gkritzapis,Dimitrios N., Panagiotopoulos, Elias E. (2011). "Epicyclic Motion Analysis for API M8 Bullet Firing Sidewise from a High Subsonic Air Vehicle". Greece: Hellenic Military Academy
- Kleeman, Lindsay.(2007)." Understanding and Applying Kalman Filtering". Clayton: Monash University.
- Lewis, F.L.(1998)."Optimal Estimation With An Introduction to Stochastic Control Theory". Georgia: School of Electrical Engineering Georgia Institute of Technology Atlanta.
- Pieniezny,S.K. (2007). "A Comparison of Estimation Accuracy by The Use of KF, EKF & UKF Filters". WIT Transaction on Modelling and Simulation Vol.6. Poland. WIT Press.